

第3章 | 複素数平面



1 複素数平面

まとめ

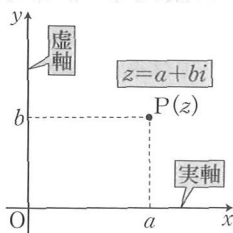
1 複素数平面(複素平面)

複素数 $a+bi$ に対して、座標平面上的点 (a, b) を対応させると、どんな複素数も座標平面上的点で表すことができる。このように、複素数を点で表す座標平面を複素数平面 または 複素平面 という。複素数平面上的の1つの点は、1つの複素数を表す。

複素数平面を考える場合、 x 軸を実軸、 y 軸を虚軸という。実軸上の点は実数を表し、虚軸上の原点 O 以外の点は純虚数を表す。

複素数平面上で複素数 z を表す点 P を $P(z)$ と書く。また、この点を点 z ということがある。たとえば、点 O とは原点 O のことである。

注意 以下、複素数 $a+bi$ や $c+di$ などでは、文字 a, b, c, d は実数を表すものとする。



2 共役複素数

複素数 z と共役な複素数を $\bar{z}$ で表す。

$\bar{z}$ を z の共役複素数ともいう。

複素数 $z=a+bi$ に対しては

$$\bar{z}=a-bi, \quad -z=-a-bi$$

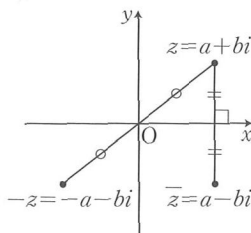
3 点の位置関係

点 z と点 $\bar{z}$ は実軸に関して対称である。

点 z と点 $-z$ は原点に関して対称である。

注意 $\bar{z}$ の共役複素数は z である。

すなわち、 $\overline{\bar{z}}=z$ である。



4 複素数が実数、純虚数を表す条件

複素数 z について、次のことが成り立つ。

[1] z が実数 $\iff \bar{z} = z$

[2] z が純虚数 $\iff \bar{z} = -z$ ただし、 $z \neq 0$

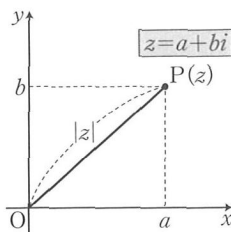
5 複素数の絶対値

原点 O と点 $P(z)$ との距離を、複素数 z の絶対値といい、 $|z|$ で表す。

複素数 $a+bi$ の絶対値は

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

補足 z が実数のとき、 $|z|$ は実数の絶対値と一致する。



6 複素数の和の図示

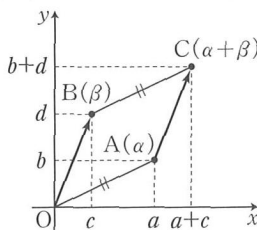
2つの複素数

$$\alpha = a+bi, \beta = c+di$$

の和は $\alpha + \beta = (a+c) + (b+d)i$

である。そこで、複素数平面上に3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\alpha + \beta)$ をとると、点 $C(\alpha + \beta)$ は、原点 O を点 $B(\beta)$ に移す平行移動によって点 $A(\alpha)$ が移る点である。

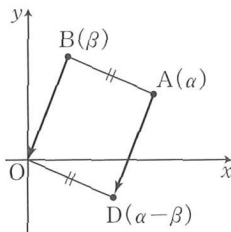
注意 右上の図において、四角形 $OACB$ は平行四辺形である。



7 複素数の差の図示

複素数平面上に3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $D(\alpha - \beta)$ をとると、点 $D(\alpha - \beta)$ は、点 $B(\beta)$ を原点 O に移す平行移動によって点 $A(\alpha)$ が移る点である。

注意 $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ であるから、 $\alpha + \beta$ の場合と逆向きの平行移動を考えている。



8 2点間の距離

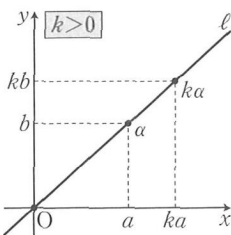
2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ 間の距離 AB は $AB = |\beta - \alpha|$

9 複素数の実数倍

実数 k と複素数 $\alpha = a+bi$ について、 $k\alpha = ka + kbi$ である。よって、 $\alpha \neq 0$ のとき、点 $k\alpha$ は2点 0 , α を通る直線 ℓ 上にある。

$k=0$ のとき点 $k\alpha$ は点 0 と一致する。

逆に、この直線 ℓ 上の点は、 α の実数倍の複素数を表す。



補足 点 $(-k)\alpha$ は、点 $k\alpha$ と原点 O に関して対称である。

$\alpha \neq 0$ のとき、次のことが成り立つ。

3点 0 , α , β が一直線上にある $\Leftrightarrow \beta = k\alpha$ となる実数 k がある
複素数 α を表す点を A , $k\alpha$ を表す点を B とすると、線分 OB の長さは線分 OA の長さの $|k|$ 倍である。すなわち、 $OB = |k|OA$ である。

補足 $|k\alpha| = |k||\alpha|$ が成り立つ。

10 共役複素数の性質

複素数 α, β について、次のことが成り立つ。

[1] $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

[2] $\overline{\alpha - \beta} = \overline{\alpha} - \overline{\beta}$

[3] $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$

[4] $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

注意 [3] が成り立つから、 n を自然数とすると、 $\overline{\alpha^n} = (\overline{\alpha})^n$ が成り立つ。

11 複素数とその共役複素数の性質

複素数 z とその共役複素数 $\bar{z}$ について、次のことが成り立つ。

[1] $z + \bar{z}$ は実数である

[2] $z\bar{z} = |z|^2$

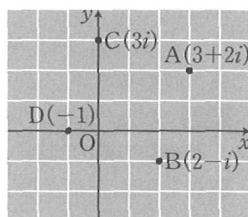
A 複素数平面

練習
1

次の点を右の図に示せ。

$P(3-2i), Q(-1+i),$

$R(4), S(-i)$



教 p.76

指針 複素数と座標平面上の点 複素数 $a+bi$ に対して座標平面上の点 (a, b) を対応させると、実数 a は $a+0i$ から点 $(a, 0)$ で表され、純虚数 bi は $0+bi$ から点 $(0, b)$ で表される。

解答 複素数 $a+bi$ と座標平面上の点 (a, b) との対応は次のようになる。

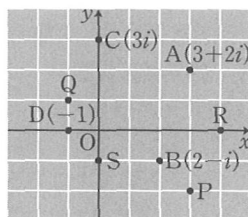
$P(3-2i) \quad (3, -2)$

$Q(-1+i) \quad (-1, 1)$

$R(4) \quad (4, 0)$

$S(-i) \quad (0, -1)$

よって、図のようになる。



教 p.77

練習
2

複素数平面上で、点 z と点 $-\bar{z}$ の位置関係を述べよ。

指針 複素数と共役複素数の位置関係 $z=a+bi$ に対して $-\bar{z}=-a+bi$ を表す点を複素数平面上に図示して調べる。

解答 $z=a+bi$ とすると、 $-\bar{z}=-a+bi$ であるから、 z と $-\bar{z}$ は虚軸に関して対称である。 答

練習
3

複素数 $z=a+bi$ について、次の問いに答えよ。

- (1) a, b をそれぞれ z と $\bar{z}$ を用いて表せ。
 (2) (1)の結果を利用して、下の **1, 2** が成り立つことを確かめよ。

$$\mathbf{1} \quad z \text{ が実数} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{z}=z$$

$$\mathbf{2} \quad z \text{ が純虚数} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{z}=-z \quad \text{ただし, } z \neq 0$$

指針 実数, 純虚数を表す条件

(1) $z=a+bi, \bar{z}=a-bi$ を a, b についての連立方程式とみて解く。

(2) z が実数 $\Leftrightarrow b=0$ z が純虚数 $\Leftrightarrow a=0, b \neq 0$

これに(1)の結果をあてはめる。

解答 (1) $z=a+bi, \bar{z}=a-bi$ であるから

$$z+\bar{z}=2a, \quad z-\bar{z}=2bi$$

$$\text{よって} \quad a=\frac{1}{2}(z+\bar{z}), \quad b=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}) \quad \text{□}$$

(2) **1** の証明

$z=a+bi$ について、 z が実数であるとする $b=0$

$$\text{ゆえに, (1)から} \quad \frac{1}{2i}(z-\bar{z})=0$$

$$\text{よって, } z-\bar{z}=0 \text{ から} \quad z=\bar{z}$$

$$\text{逆に, } z=\bar{z} \text{ とすると, (1)から} \quad b=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})=0$$

よって、 z は実数である。

以上により、「 z が実数 $\Leftrightarrow \bar{z}=z$ 」が成り立つ。 □

2 の証明

$z=a+bi$ について、 z が純虚数であるとする $a=0, b \neq 0$

$$\text{ゆえに, (1)から} \quad \frac{1}{2}(z+\bar{z})=0 \quad \text{ただし, } z \neq 0$$

$$\text{よって, } z+\bar{z}=0 \text{ から} \quad \bar{z}=-z \quad \text{ただし, } z \neq 0$$

逆に、 $\bar{z}=-z, z \neq 0$ とする。

$$\text{このとき} \quad z+\bar{z}=0$$

$$\text{ゆえに, (1)から} \quad a=\frac{1}{2}(z+\bar{z})=0$$

このとき、 $z \neq 0$ から $b \neq 0$

よって、 z は純虚数である。

以上により、「 z が純虚数 $\Leftrightarrow \bar{z}=-z$ ただし、 $z \neq 0$ 」が成り立つ。 □

3
章

複素数平面

B 複素数の絶対値

教 p.78

練習

4

次の複素数の絶対値を求めよ。

- (1) $3-2i$ (2) $-2+4i$ (3) -5 (4) $3i$

指針 複素数の絶対値 複素数 $a+bi$ の絶対値は $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ これにあてはめる。

解答 (1) $|3-2i|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$ 答

(2) $|-2+4i|=\sqrt{(-2)^2+4^2}$
 $=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ 答

(3) $|-5|=\sqrt{(-5)^2+0^2}=5$ 答

(4) $|3i|=\sqrt{0^2+3^2}=3$ 答

練習

5

複素数 z について、 $|\overline{-z}|=|z|$ であることを確かめよ。

教 p.78

指針 複素数の絶対値の性質 原点 O と点 $P(z)$, $S(\overline{-z})$ の位置関係から確かめる。

解答 $|-z|=|z|$ から $|\overline{-z}|=|z|$

さらに、 $|\overline{z}|=|z|$ であるから $|\overline{-z}|=|z|$ 終

別解 点 $P(z)$ と点 $S(\overline{-z})$ は虚軸に関して対称であるから $OS=OP$

よって $|\overline{-z}|=|z|$ 終

C 複素数の和、差の図示

教 p.79

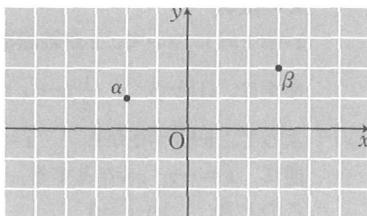
練習

6

右の図の複素数平面上の点 α , β について、次の点を図に示せ。

(1) $\alpha+\beta$

(2) $\alpha-\beta$

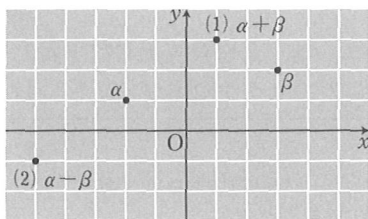


指針 複素数の和、差の図示

(1) 点 $\alpha+\beta$ は、原点 O を点 β に移す平行移動によって点 α が移る点である。

(2) 点 $\alpha-\beta$ は、点 β を原点 O に移す平行移動によって点 α が移る点である。

解答



3

章

複素数平面

練習
7

次の2点間の距離を求めよ。

(1) $A(2+3i), B(1+6i)$

(2) $C(3-4i), D(1-2i)$

教 p.80

指針 2点間の距離

(1) $\alpha=2+3i, \beta=1+6i$ とおくと

$$\beta-\alpha=(1+6i)-(2+3i)$$

$$=(1-2)+(6-3)i=-1+3i$$

 $z=a+bi$ のとき $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ であることを利用する。

解答 (1) $AB=|(1+6i)-(2+3i)|$

$$=|-1+3i|=\sqrt{(-1)^2+3^2}$$

$$=\sqrt{10} \quad \text{答}$$

(2) $CD=|(1-2i)-(3-4i)|$

$$=|-2+2i|=\sqrt{(-2)^2+2^2}$$

$$=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \quad \text{答}$$

コラム 複素数平面とベクトル

確認

複素数平面上に3点 $A(\alpha), B(\beta), C(\alpha+\beta)$ をとる。 $\overrightarrow{OA}=(a, b)$ とするとき, $\overrightarrow{OC}$ を成分表示してみよう。

教 p.80

解答 $\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$ であるから $\overrightarrow{OC}=(a+c, b+d) \quad \text{答}$

発見

 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ の間にはどのような関係式が成り立つだろうか。

教 p.80

解答 $\overrightarrow{OA}=(a, b), \overrightarrow{OB}=(c, d)$ であるから

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$$

よって $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC} \quad \text{答}$

まとめ

2つの複素数 α , β の和, 差と, α , β を表す複素数平面上の点の位置ベクトルの和, 差の間にはどのような関係があるだろうか。

解答 $D(\alpha-\beta)$ とする。

$$\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i \text{ であるから } \overrightarrow{OD}=(a-c, b-d)$$

$$\text{また, } \overrightarrow{OA}=(a, b), \overrightarrow{OB}=(c, d) \text{ であるから}$$

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(a, b)-(c, d)=(a-c, b-d)$$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$$

よって, 発見で示したことと合わせると

2つの複素数 α , β の和(差)は, α , β を表す複素数平面上の点の位置ベクトルの和(差)と等しい

ことがわかる。 答

D 複素数の実数倍

練習

8

$\alpha=3-6i$, $\beta=1+yi$ とする。2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ と原点 O が一直線上にあるとき, 実数 y の値を求めよ。

指針 複素数の実数倍 $\alpha \neq 0$ のとき, 次のことが成り立つことを利用する。

3点 O , α , β が一直線上にある $\Leftrightarrow \beta=k\alpha$ となる実数 k がある

解答 $\beta=k\alpha$ となる実数 k がある。

$$1+yi=k(3-6i) \text{ から}$$

$$1+yi=3k-6ki$$

$$y, 3k, -6k \text{ は実数であるから}$$

$$1=3k, y=-6k$$

$$k=\frac{1}{3} \text{ であるから}$$

$$y=-6 \cdot \frac{1}{3}=-2 \quad \text{答}$$

E 共役複素数の性質

練習

9

複素数 α , β について, $\alpha+\beta+i=0$ のとき, $\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ を求めよ。

指針 共役複素数の性質 $\alpha+\beta+i=0$ から $\alpha+\beta=-i$

両辺の共役複素数を考えると $\overline{\alpha+\beta}=\overline{-i}$

ここで $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ を利用する。また, $\overline{-i}=i$ である。

解答 $\alpha+\beta+i=0$ から $\alpha+\beta=-i$

両辺の共役複素数を考えると

$$\overline{\alpha+\beta}=\overline{-i} \quad \text{すなわち} \quad \overline{\alpha}+\overline{\beta}=i \quad \text{答}$$

練習
10

複素数 α について、次のことを証明せよ。

$|\alpha|=1$ のとき、 $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ は実数である。

指針 複素数が実数である条件

$[\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \text{ が実数} \iff \overline{\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}} = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}]$ を利用して証明する。

式変形においては、 $z\bar{z}=|z|^2$ を利用する。

解答 $|\alpha|=1$ のとき、 $|\alpha|^2=1$ であるから

$$\alpha\bar{\alpha}=1 \quad \text{すなわち} \quad \bar{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$$

$$\text{ここで} \quad \overline{\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}} = \bar{\alpha}^2 + \overline{\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)} = (\bar{\alpha})^2 + \frac{1}{(\bar{\alpha})^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \alpha^2$$

よって、 $\overline{\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}} = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ であるから、 $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ は実数である。□

3
章

複素数平面

深める

$z + \bar{z}$ が実数であることを利用して、教科書例題2で証明した次のことを証明してみよう。

$|\alpha|=1$ のとき、 $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ は実数である。

指針 $\alpha + \bar{\alpha}$ が実数であり、 $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ であることを利用して示す。

解答 $|\alpha|=1$ のとき $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ であるから $\alpha + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \bar{\alpha}$

$\alpha + \bar{\alpha}$ は実数であるから、 $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ は実数である。□

2 複素数の極形式

まとめ

1 極形式

複素数平面上で、0でない複素数 $z=a+bi$ を表す点を P とする。線分 OP の長さを r 、半直線 OP を動径と考えて動径 OP の表す角を θ とすると

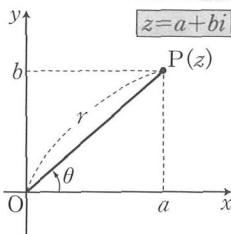
$$r=\sqrt{a^2+b^2}, \quad a=r\cos\theta, \quad b=r\sin\theta$$

である。よって、0でない複素数 z は次の形にも表される。

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

ただし、 $r>0$ で、 θ は弧度法で表された一般角である。

これを複素数 z の 極形式 という。 $r=|z|$ である。



2 偏角

極形式の角 θ を z の 偏角 といい、 $\arg z$ で表す。偏角 θ は、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲や $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲でただ1通りに定まる。 z の偏角の1つを θ_0 とすると、一般には、 $\arg z = \theta_0 + 2n\pi$ (n は整数) である。

注意 $\arg$ は「偏角」を意味する英語 argument を略したものである。

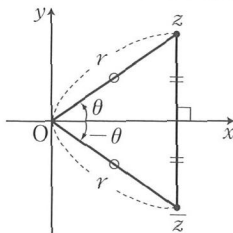
3 $\bar{z}$ の極形式

複素数 z の偏角を θ とするとき、 $\bar{z}$ の偏角の1つは、 $\arg \bar{z} = -\theta$ である。

また、 $|z| = |\bar{z}|$ であるから、 z と $\bar{z}$ の極形式について、次のことがいえる。

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のとき

$$\bar{z} = r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$$



4 極形式で表された複素数の積と商

$\alpha = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $\beta = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ のとき

$$\alpha\beta = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

5 複素数の積と商の絶対値と偏角

$$[1] \quad |\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \quad \arg \alpha\beta = \arg \alpha + \arg \beta$$

$$[2] \quad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad \arg \frac{\alpha}{\beta} = \arg \alpha - \arg \beta$$

注意 偏角についての等式では、 2π の整数倍の違いは無視して考える。

[1] より、複素数 z と自然数 n について、 $|z^n| = |z|^n$ が成り立つ。

6 原点を中心とする回転

複素数 $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$ と複素数 z について

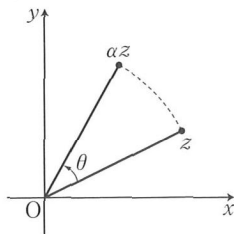
$$|\alpha z| = |\alpha| |z| = |z|$$

$$\arg \alpha z = \arg \alpha + \arg z = \arg z + \theta$$

このことから、次のことがいえる。

 $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$ と z に対して、点 αz は、点 z を原点を中心として θ だけ回転した点である。

注意 $\bar{\alpha} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$ であるから、点 $\bar{\alpha} z$ は、点 z を原点を中心として $-\theta$ だけ回転した点である。



3 章

複素数平面

A 極形式

教 p.85

練習
11次の複素数を極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は、(1), (2) では $0 \leq \theta < 2\pi$, (3), (4) では $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。

- (1) $\sqrt{3} + i$ (2) $2 + 2i$ (3) $1 - \sqrt{3}i$ (4) $-i$

指針 複素数の極形式 複素数 $z = a + bi$ を複素数平面上に図示すると $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$ から、絶対値 r について $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

偏角 θ について $\tan \theta = \frac{b}{a}$

解答 (1) $\sqrt{3} + i$ の絶対値を r とすると

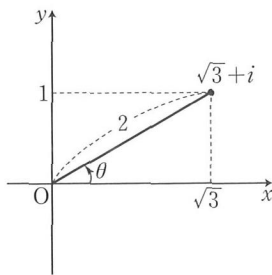
$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \frac{\pi}{6}$$

よって

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{答}$$



- (2)
- $2+2i$
- の絶対値を
- r
- とすると

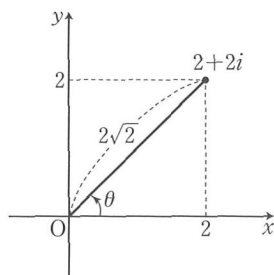
$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \frac{\pi}{4}$$

よって

$$2+2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{答}$$



- (3)
- $1-\sqrt{3}i$
- の絶対値を
- r
- とすると

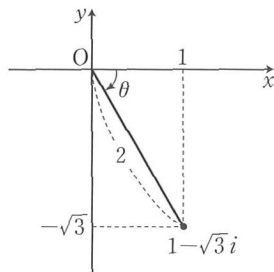
$$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\pi < \theta \leq \pi \text{ では } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

よって $1-\sqrt{3}i$

$$= 2 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} \quad \text{答}$$

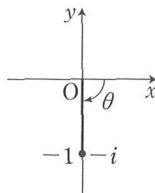


- (4)
- $-i$
- の絶対値を
- r
- とすると

$$r = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1, \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = -1$$

$$-\pi < \theta \leq \pi \text{ では } \theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{よって } -i = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \quad \text{答}$$

練習
12

教 p.85

複素数 z の極形式を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とする。このとき、 $-z$ の極形式について、次のことを示せ。

$$-z = r\{\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)\}$$

指針 $-z$ の極形式 z と $-z$ が原点に関して対称であるから、 $-z$ の偏角の 1 つは z の偏角 θ を π だけ回転させたものである。

解答 点 $-z$ は点 z と原点に関して対称である。

ゆえに、 $-z$ の偏角の 1 つは $\theta + \pi$

また $|-z| = |z|$

よって $-z = r\{\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)\} \quad \text{終}$

参考 $r\{\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)\} = -r(\cos \theta + i \sin \theta) = -z$

B 極形式で表された複素数の積と商

教 p.87

練習
13

次の複素数 α , β について, $\alpha\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし, 偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

$$\alpha = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad \beta = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

指針 複素数の積と商の極形式

$$\alpha = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad \beta = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

のとき

$$\alpha\beta = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \}$$

解答 $\alpha\beta = 2\sqrt{2} \cdot 2 \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right\}$

$$= 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi \right) \quad \text{答}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right\}$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \quad \text{答}$$

練習
14

教 p.87

複素数 α , β について, $|\alpha| = 2$, $|\beta| = 3$ のとき, 次の値を求めよ。

$$(1) |\alpha\beta| \quad (2) |\alpha^3| \quad (3) \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \quad (4) \left| \frac{\beta}{\alpha^2} \right|$$

指針 複素数の積と商の絶対値 $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$, $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ である。

また, n を自然数とすると $|z^n| = |z|^n$ が成り立つことを利用する。

解答 (1) $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| = 2 \cdot 3 = 6$ 答

$$(2) |\alpha^3| = |\alpha|^3 = 2^3 = 8 \quad \text{答}$$

$$(3) \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \frac{2}{3} \quad \text{答}$$

$$(4) \left| \frac{\beta}{\alpha^2} \right| = \frac{|\beta|}{|\alpha|^2} = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4} \quad \text{答}$$

C 複素数の積と図形

教 p.88

練習
15次の点は、点 z をどのように移動した点であるか。

- (1) $(1+\sqrt{3}i)z$ (2) $(-1+i)z$ (3) $2iz$

指針 原点を中心とする回転と原点からの距離の実数倍

 z の係数を極形式で表し、その絶対値と偏角に着目する。解答 (1) $1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

よって、点 $(1+\sqrt{3}i)z$ は、点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し、原点からの距離を 2 倍した点である。 答

- (2) $-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

よって、点 $(-1+i)z$ は、点 z を原点を中心として $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転し、原点からの距離を $\sqrt{2}$ 倍した点である。 答

- (3) $2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

よって、点 $2iz$ は、点 z を原点を中心として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転し、原点からの距離を 2 倍した点である。 答

練習
16

教 p.89

$z=4-2i$ とする。点 z を原点を中心として次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

- (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{2}{3}\pi$ (3) $-\frac{\pi}{2}$ (4) $-\frac{\pi}{3}$

指針 原点を中心として回転した点を表す複素数

- (1) $z=4-2i$ を原点を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数は

$$\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)z=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(4-2i)$$

この右辺を計算したものが、求める複素数である。

解答 (1) $\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)(4-2i) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(4-2i)$
 $= (2\sqrt{3}+1) + (-\sqrt{3}+2)i$ 答

(2) $\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right)(4-2i) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i)$
 $= (-2+\sqrt{3}) + (1+2\sqrt{3})i$ 答

(3) $\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}(4-2i) = -i(4-2i)$
 $= -2-4i$ 答

(4) $\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(4-2i) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4-2i)$
 $= (2-\sqrt{3}) - (1+2\sqrt{3})i$ 答

教 p.89

練習
17

$\alpha = 2+2i$ とする。複素数平面上の3点 $0, \alpha, \beta$ を頂点とする三角形が、正三角形であるとき、 β の値を求めよ。

指針 正三角形の頂点を表す複素数 $A(\alpha), B(\beta)$ とすると $\angle AOB = 60^\circ$ であるから、点 β は点 α を原点を中心に $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。

解答 点 β は、点 α を原点を中心に

$\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから

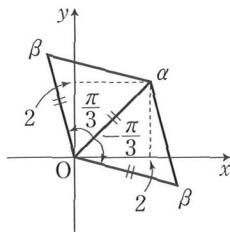
$$\begin{aligned}\beta &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\alpha \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+2i) \\ &= (1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i\end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned}\beta &= \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\alpha \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+2i) = (1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})i\end{aligned}$$

よって $\beta = (1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i$ または

$$\beta = (1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})i \quad \text{答}$$



3 ド・モアブルの定理

まとめ

1 ド・モアブルの定理

 n が整数のとき

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

注意 0 でない複素数 z と自然数 n に対して、 $z^0=1$ 、 $z^{-n}=\frac{1}{z^n}$ と定める。

2 α の n 乗根

複素数 α と正の整数 n に対して、方程式 $z^n = \alpha$ の解を、 α の n 乗根 という。

0 でない複素数の n 乗根は n 個ある。

3 1 の n 乗根

1 の n 乗根は、次の式から得られる n 個の複素数である。

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

補足 $n \geq 3$ のとき、1 の n 乗根を表す点は、単位円に内接する正 n 角形の各頂点である。とくに、頂点の 1 つは点 1 である。

A ド・モアブルの定理

教 p.91

練習
18

次の式を計算せよ

$$(1) (1+\sqrt{3}i)^5 \quad (2) (1+i)^8 \quad (3) (1-\sqrt{3}i)^{-6}$$

指針 複素数 $(a+bi)^n$ の値 複素数 $a+bi$ を極形式で表し、ド・モアブルの定理を利用する。 n が整数のとき

$$\{r(\cos \theta + i \sin \theta)\}^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

解答 (1) $1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ であるから

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{3}i)^5 &= 2^5 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^5 = 32 \left(\cos \frac{5}{3}\pi + i \sin \frac{5}{3}\pi\right) \\ &= 32 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16 - 16\sqrt{3}i \quad \text{答} \end{aligned}$$

(2) $1+i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$\begin{aligned} (1+i)^8 &= (\sqrt{2})^8 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)^8 \\ &= 16(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 16 \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$(3) \quad 1 - \sqrt{3}i = 2 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} \quad \text{であるから}$$

$$(1 - \sqrt{3}i)^{-6} = 2^{-6} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\}^{-6}$$

$$= \frac{1}{64} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = \frac{1}{64} \quad \text{答}$$



二項定理を用いて、教科書例題5の $(\sqrt{3} - i)^6$ を計算してみよう。

教 p.91

解答 $(\sqrt{3} - i)^6 = {}_6C_0(\sqrt{3})^6 + {}_6C_1(\sqrt{3})^5(-i) + {}_6C_2(\sqrt{3})^4(-i)^2$
 $+ {}_6C_3(\sqrt{3})^3(-i)^3 + {}_6C_4(\sqrt{3})^2(-i)^4 + {}_6C_5(\sqrt{3})(-i)^5 + {}_6C_6(-i)^6$
 $= 27 - 54\sqrt{3}i - 135 + 60\sqrt{3}i + 45 - 6\sqrt{3}i - 1$
 $= -64 \quad \text{答}$

B 複素数の n 乗根



1の8乗根を求めよ。

教 p.92

指針 1の8乗根 1の8乗根は次の式から得られる8個の複素数である。

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{8} + i \sin \frac{2k\pi}{8} \quad (k=0, 1, 2, \dots, 7)$$

解答 1の8乗根は $z_k = \cos \frac{2k\pi}{8} + i \sin \frac{2k\pi}{8} \quad (k=0, 1, 2, \dots, 7)$

よって $z_0 = 1$

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$z_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$z_3 = \cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$z_4 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$z_5 = \cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$z_6 = \cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi = -i$$

$$z_7 = \cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

答 $\pm 1, \pm i, \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i, -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$

練習
20

次の方程式を解け。また、解を表す点を、それぞれ複素数平面上に図示せよ。

(1) $z^2 = i$

(2) $z^4 = -4$

(3) $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$

指針 複素数 α の n 乗根 $z^n = \alpha$ において、複素数 z , α の極形式を

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \alpha = r_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$$

とおくと $r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$

両辺の絶対値と偏角を比較して、 r , θ を求める。

このとき、 $r > 0$, $n\theta = \theta_0 + 2k\pi$ (k は整数) に注意する。

解答 (1) z の極形式を $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ …… ① とすると

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

また、 i を極形式で表すと $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

よって、方程式は

$$r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^2 = 1, \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ であるから

$$r = 1 \quad \dots\dots ②$$

また $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では、 $k = 0, 1$ であるから

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi \quad \dots\dots ③$$

②, ③を①に代入して、求める解は

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \quad \text{答}$$

この解を複素数平面上に図示すると、図のようになる。

$$(2) \quad z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$$

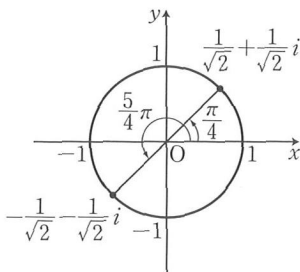
また、 -4 を極形式で表すと $-4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$

よって、方程式は

$$r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4 = 4, \quad 4\theta = \pi + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$



$r > 0$ であるから

$$r = \sqrt{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{また} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では、 $k=0, 1, 2, 3$ であるから

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②, ③を①に代入して、求める解は

$$z = 1+i, -1+i, -1-i, 1-i \quad \text{答}$$

この解を複素数平面上に図示すると、図のようになる。

$$(3) \quad z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

$$\text{また, } 1 + \sqrt{3}i \text{ を極形式で表すと } 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

よって、方程式は

$$r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^2 = 2, \quad 2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r > 0$ であるから

$$r = \sqrt{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{また} \quad \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲では、 $k=0, 1$ で

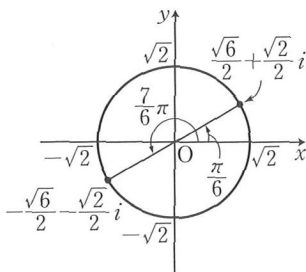
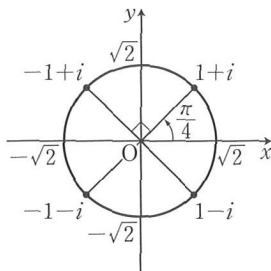
あるから

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②, ③を①に代入して、求める解は

$$z = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{答}$$

この解を複素数平面上に図示すると、図のようになる。



4 複素数と図形

まとめ

1 線分の内分点, 外分点

2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を $C(\gamma)$, $m:n$ に外分する点を $D(\delta)$ とすると

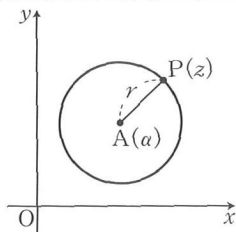
$$\text{内分点 } \gamma = \frac{n\alpha + m\beta}{m+n} \quad \text{外分点 } \delta = \frac{-n\alpha + m\beta}{m-n}$$

とくに, 線分 AB の中点を表す複素数は $\frac{\alpha + \beta}{2}$

2 円

点 $A(\alpha)$ を中心とする半径 r の円上の点を $P(z)$ とすると $AP=r$ であるから, 方程式 $|z - \alpha| = r$ を満たす点 z 全体の集合は, 点 A を中心とする半径 r の円である。

とくに, 原点を中心とする半径 r の円は, 方程式 $|z| = r$ で表される。

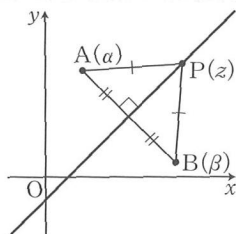


3 方程式の表す図形(垂直二等分線)

2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線上の点を $P(z)$ とすると, $AP=BP$ であるから, 方程式

$$|z - \alpha| = |z - \beta|$$

を満たす点 z 全体の集合は, 線分 AB の垂直二等分線である。

4 点 α を中心とする回転

2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ について, 点 B を点 A を中心として θ だけ回転した点を $C(\gamma)$ とする。このとき, γ を α , β で表すことを考えてみよう。

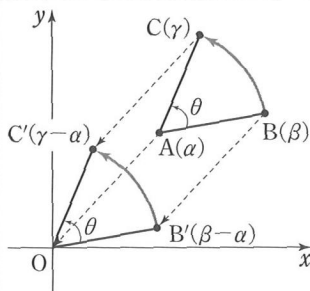
点 A を原点に移す平行移動によって, 点 B , C がそれぞれ点 $B'(\beta')$, $C'(\gamma')$ に移るとすると

$$\beta' = \beta - \alpha, \quad \gamma' = \gamma - \alpha$$

である。点 C' は, 点 B' を原点を中心として θ だけ回転した点であるから, 次のことが成り立つ。

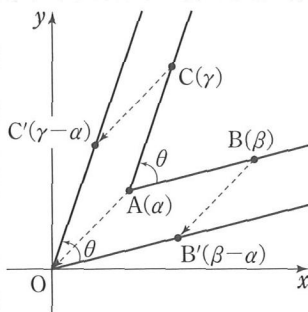
点 β を点 α を中心として θ だけ回転した点を表す複素数を γ とすると

$$\gamma - \alpha = (\cos \theta + i \sin \theta) (\beta - \alpha)$$



5 半直線のなす角

異なる3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ に対して、点 A を中心として半直線 AB を半直線 AC の位置まで回転させたときの角 θ を、半直線 AB から半直線 AC までの回転角という。ただし、 θ は弧度法で表された一般角である。点 A を原点に移す平行移動によって、点 B , C はそれぞれ点 $B'(\beta-\alpha)$, $C'(\gamma-\alpha)$ に移る。 θ は半直線 OB' から半直線 OC' までの回転角に等しいから、次が成り立つ。



$$\theta = \arg(\gamma - \alpha) - \arg(\beta - \alpha) = \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$$

6 共線条件, 垂直条件

上の5において、3点 A , B , C が一直線上にある(このとき、3点は共線であるという)のは、 θ が0または π のときであり、 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ は実数である。また、2直線 AB , AC が垂直に交わるのは、 θ が $\frac{\pi}{2}$ または $-\frac{\pi}{2}$ のときであり、 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ は純虚数である。

異なる3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ について、次のことが成り立つ。

3点 A , B , C が一直線上にある $\Leftrightarrow \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が実数

2直線 AB , AC が垂直に交わる $\Leftrightarrow \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ が純虚数

A 線分の内分点, 外分点

教 p.94

練習
21

$A(1+5i)$, $B(7-i)$ とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を $1:2$ に内分する点 C (2) 線分 AB の中点 M

(3) 線分 AB を $3:2$ に外分する点 D

指針 線分の内分点, 外分点 2点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$ を $m:n$ に内分, 外分する点は

$$\text{内分点} \quad \frac{n\alpha + m\beta}{m+n} \quad \text{外分点} \quad \frac{-n\alpha + m\beta}{m-n}$$

とくに、線分 AB の中点を表す複素数は $\frac{\alpha + \beta}{2}$

これらにあてはめて求める。

解答 点 C, M, D を表す複素数をそれぞれ γ , ω , δ とする。

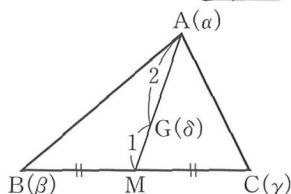
$$(1) \gamma = \frac{2(1+5i) + (7-i)}{1+2} = \frac{9+9i}{3} = 3+3i \quad \text{答}$$

$$(2) \omega = \frac{(1+5i) + (7-i)}{2} = \frac{8+4i}{2} = 4+2i \quad \text{答}$$

$$(3) \delta = \frac{-2(1+5i) + 3(7-i)}{3-2} = 19-13i \quad \text{答}$$

練習
22

3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について、その重心を $G(\delta)$ とするとき、 $\delta = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$ であることを示せ。



教 p.95

指針 三角形の重心 $\triangle ABC$ の重心 G は、中線 AM を $2:1$ に内分する点であるから $\delta = \frac{1 \cdot \alpha + 2\omega}{2+1}$ (ω は M を表す複素数)

解答 辺 BC の中点を M とすると、 M を表す複素数は $\frac{\beta + \gamma}{2}$

重心 $G(\delta)$ は中線 AM を $2:1$ に内分するから

$$\delta = \frac{\alpha + 2\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)}{2+1} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \quad \text{答}$$

B 方程式の表す図形

教 p.95

練習
23

次の方程式を満たす点 z 全体の集合は、どのような図形か。

$$(1) |z|=2 \quad (2) |z-(1+i)|=1 \quad (3) |z-2|=|z-4i|$$

指針 方程式の表す図形

(1), (2) 方程式 $|z-\alpha|=r$ ($r>0$) を満たす点 z 全体の集合は、点 α を中心とし、半径が r の円である。

(3) $|z-2|$ は、点 z と点 2 の距離を表し、 $|z-4i|$ は、点 z と点 $4i$ の距離を表す。これらが等しいことから、点 z は点 2 と $4i$ から等しい距離にある点である。すなわち、 $A(2)$, $B(4i)$ とすると、線分 AB の垂直二等分線上にあることがわかる。

- 解答 (1) $|z-0|=2$ であるから 原点を中心とする半径 2 の円 答
 (2) 点 $1+i$ を中心とする半径 1 の円 答
 (3) 2 点 $A(2)$, $B(4i)$ から等距離にある点 z 全体の集合で、求める図形は 2 点 $A(2)$, $B(4i)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線 答

練習
24

教 p.96

方程式 $2|z-3|=|z|$ を満たす点 z 全体の集合は、どのような図形か。

指針 方程式の表す図形(円) 与えられた方程式の両辺を 2 乗し、絶対値の性質 $|z|^2 = z\bar{z}$ を利用して、式を整理する。

解答 方程式の両辺を 2 乗すると

$$4|z-3|^2 = |z|^2$$

$$\text{よって} \quad 4(z-3)(\bar{z}-3) = z\bar{z}$$

$$4(z-3)(\bar{z}-3) = z\bar{z}$$

左辺を展開して整理すると

$$z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 12 = 0$$

$$\text{式を整理すると} \quad (z-4)(\bar{z}-4) = 4$$

$$\text{すなわち} \quad (z-4)(\bar{z}-4) = 4$$

$$\text{よって} \quad |z-4|^2 = 2^2$$

$$\text{したがって} \quad |z-4| = 2$$

これは、点 4 を中心とする半径 2 の円である。 答

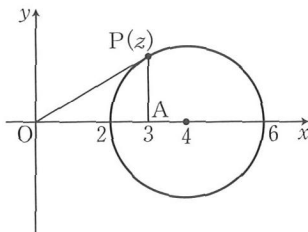
補足 本問の円は、図のようになる。原点 O と

点 $A(3)$, $P(z)$ をとると、

$$2|z-3| = |z| \text{ は } 2AP = OP$$

すなわち $OP : AP = 2 : 1$ を表す。

このような円を アポロニウスの円 という。

練習
25

教 p.97

$w = i(z-2)$ とする。点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき、点 w はどのような図形を描くか。

指針 条件を満たす点が描く図形 条件は、「点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき」であるから $|z|=1$ と表される。そこで、 $w = i(z-2)$ を $z = \frac{w+2i}{i}$ と w の式で表し、 $|z|=1$ に代入する。すると、 w についての方程式が得られ、点 w の描く図形が求められる。

3 章

複素数平面

解答 条件から、点 z は等式 $|z|=1$ を満たす。

$$w=i(z-2) \text{ より } z=\frac{w+2i}{i} \text{ であるから}$$

$$|z|=\left|\frac{w+2i}{i}\right|=\frac{|w+2i|}{|i|}=|w+2i|$$

$$\text{すなわち } |w+2i|=1$$

よって、点 w は点 $-2i$ を中心とする半径 1 の円を描く。 **答**

注意 上の $i(z-2)$ の図形的な意味は、点 z を原点を点 -2 に移すような平行移動をし、さらに原点を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転することである。

C 点 α を中心とする回転

教 p.98

練習
26

$\alpha=1+i$, $\beta=5+3i$ とする。点 β を、点 α を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

指針 原点以外の点を中心とする回転 点 $(\gamma-\alpha)$ は点 $(\beta-\alpha)$ を原点を中心に $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点である。これを利用する。

解答 $\gamma-\alpha=\left(\cos \frac{\pi}{6}+i \sin \frac{\pi}{6}\right)(\beta-\alpha)$ であるから

$$\begin{aligned} \gamma &= \left(\cos \frac{\pi}{6}+i \sin \frac{\pi}{6}\right)\{(5+3i)-(1+i)\}+(1+i) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(4+2i)+(1+i) \\ &= 2\sqrt{3}+(\sqrt{3}+3)i \quad \text{答} \end{aligned}$$

D 半直線のなす角

教 p.99

練習
27

3 点 $A(1-i)$, $B(2+i)$, $C(2i)$ に対して、半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ を求めよ。ただし、 $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。

指針 半直線のなす角

$A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ のとき、複素数 $w=\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を考え、 $\arg w$ を求める。

解答 $\alpha=1-i$, $\beta=2+i$, $\gamma=2i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{-1+3i}{1+2i} = \frac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = 1+i$$

偏角 θ の範囲を $-\pi < \theta \leq \pi$ として, $1+i$ を極形式で表すと

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

よって $\theta = \arg \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\pi}{4}$ 答

教 p.100

練習
28

3点 $A(-1+i)$, $B(3-i)$, $C(x+3i)$ について, 次の問いに答えよ。
ただし, x は実数とする。

- (1) 2直線 AB , AC が垂直に交わるように, x の値を定めよ。
- (2) 3点 A , B , C が一直線上にあるように, x の値を定めよ。

指針 垂直条件・共線条件 3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ とすると

$$(1) \quad AB \text{ と } AC \text{ が垂直} \iff \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} \text{ が純虚数}$$

$$(2) \quad A, B, C \text{ が一直線上} \iff \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} \text{ が実数}$$

解答
$$\frac{(x+3i)-(-1+i)}{(3-i)-(-1+i)} = \frac{(x+1)+2i}{4-2i} = \frac{\{(x+1)+2i\}(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}$$

$$= \frac{2x+(x+5)i}{10} \dots\dots ①$$

- (1) 2直線 AB , AC が垂直に交わるのは, ①が純虚数のときであるから

$$2x=0 \quad \text{かつ} \quad x+5 \neq 0$$

よって $x=0$ 答

- (2) 3点 A , B , C が一直線上にあるのは, ①が実数のときであるから

$$x+5=0$$

よって $x=-5$ 答

教 p.101

練習
29

3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について, 等式
 $\gamma=(1-i)\alpha+i\beta$ が成り立つとき, 次のものを求めよ。

- (1) 複素数 $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値
- (2) $\triangle ABC$ の3つの角の大きさ

指針 複素数の等式と式の値, 三角形の角の大きさ

- (1) 等式を変形して, $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ をつくる。

- (2) $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の絶対値はどうなるかを考える。(1)の結果を利用する。

解答 (1) 等式から $\gamma-\alpha=i(\beta-\alpha)$

よって $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=i$ ㊞

- (2) (1)より, $\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1$ であるから $|\gamma-\alpha|=|\beta-\alpha|$

ゆえに $AB=AC$

また, $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数であるから, 2 直線 AB, AC は垂直に交わり

$$\angle A = \frac{\pi}{2}$$

よって, $\triangle ABC$ は, $AB=AC$ の直角二等辺三角形で

$$\angle B = \angle C = \frac{\pi}{4}$$

㊞ $\angle A = \frac{\pi}{2}, \angle B = \frac{\pi}{4}, \angle C = \frac{\pi}{4}$

研究 3 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$

まとめ

三角形の形状

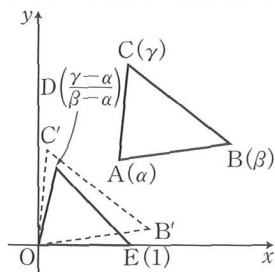
次のように, 辺の比と角の大きさを調べることで, 三角形の形状を確かめることができる。

3 点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ を頂点とする

$\triangle ABC$ があるとき, 原点 O と点 $D\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$,

$E(1)$ を頂点とする $\triangle OED$ を考えると

$$\triangle OED \sim \triangle ABC$$



練習

1

3 点 $A(-1+i), B(1-i), C(-\sqrt{3}-\sqrt{3}i)$ を頂点とする $\triangle ABC$ はどのような三角形か。

教 p.102

指針 三角形の形状 原点 O と点 $D\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$, $E(1)$ を頂点とする $\triangle OED$ を考えると

$\triangle OED \sim \triangle ABC$ であるから, まず, $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値を求める。

解答 $\alpha = -1+i$, $\beta = 1-i$, $\gamma = -\sqrt{3}-\sqrt{3}i$ とする。

$$\begin{aligned}\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} &= \frac{(-\sqrt{3}-\sqrt{3}i)-(-1+i)}{(1-i)-(-1+i)} \\ &= \frac{(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})i}{2(1-i)} \\ &= \frac{\{(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})i\}(1+i)}{2(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{2-2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

原点 O と点 D $\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$, 点 E(1) を頂点

とする $\triangle OED$ を考えると

$$\triangle OED \sim \triangle ABC$$

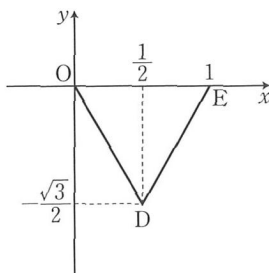
である。ここで

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

であるから $OD=1$, $\angle DOE = \frac{\pi}{3}$

ゆえに, $\triangle OED$ は正三角形である。

よって, $\triangle ABC$ は正三角形である。 答



第3章

問題

教 p.103

1 複素数 z が, 等式 $2z + \bar{z} = 1+i$ を満たすとき, 次の問いに答えよ。

(1) $2\bar{z} + z$ を求めよ。

(2) z を求めよ。

指針 共役複素数の性質

(1) $2z + \bar{z} = 1+i$ の両辺の共役複素数を考える。

(2) $2z + \bar{z} = 1+i$ と(1)の結果から $\bar{z}$ を消去する。

解答 (1) $2\bar{z} + z = \overline{2z + \bar{z}} = \overline{1+i} = 1-i$ 答

(2) $2z + \bar{z} = 1+i$ …… ①

$2\bar{z} + z = 1-i$ …… ②

① $\times 2 -$ ② から $3z = 1+3i$ よって $z = \frac{1}{3} + i$ 答

教 p.103

2 複素数 α , β について, $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ が実数であることを証明せよ。

指針 複素数 z が実数である条件 $z = \bar{z}$ を導く。

$$\begin{aligned}\text{解答 } \overline{\alpha\beta} + \overline{\alpha\beta} &= \overline{\alpha\beta} + \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha\beta} + \overline{\alpha\beta} \\ &= \overline{\alpha\beta} + \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha\beta} + \overline{\alpha\beta}\end{aligned}$$

よって、 $\overline{\alpha\beta} + \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha\beta} + \overline{\alpha\beta}$ であるから、 $\overline{\alpha\beta} + \overline{\alpha\beta}$ は実数である。 [終]

[別解] $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha\beta}$ であるから、 $\overline{\alpha\beta} + \overline{\alpha\beta}$ は実数である。 [終]

教 p.103

3 $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ とするとき、複素数 $z+1$ を極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

指針 極形式 複素数 $z+1$ を $a+bi$ の形で表し、絶対値 r 、偏角 θ を求めて $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ の形に表す。

r と θ は $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \theta = \frac{a}{r}$, $\sin \theta = \frac{b}{r}$ から求める。

$$\text{解答 } z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{ゆえに } z+1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z+1 \text{ の絶対値を } r \text{ とすると } r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{よって } z+1 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{[答]}$$

教 p.103

4 座標平面上の点 $P(2, 1)$ を、原点 O を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点を Q とするとき、 Q の座標を求めよ。

指針 原点を中心として回転した点の座標 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ とすると、座標平面上の点 $P(2, 1)$ は、複素数平面上で $\alpha = 2+i$ と表される。点 $Q(\beta)$ は、点 $P(\alpha)$ を原点 O を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点であるから、 $\beta = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \alpha$ より求めることができる。

解答 複素数平面上で考える。 $P(\alpha)$, $Q(\beta)$ とすると $\alpha = 2+i$

点 $Q(\beta)$ は、点 $P(\alpha)$ を原点 O を中心として $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点であるから

$$\begin{aligned}\beta &= \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) (2+i) \\ &= \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) i\end{aligned}$$

よって、求める Q の座標は $\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right)$ 答

教 p.103

5 複素数 z の絶対値が 1, 偏角が $\frac{\pi}{6}$ のとき, $\frac{z^8+1}{z^4}$ の値を求めよ。

指針 ド・モアブルの定理 z を極形式で表して, ド・モアブルの定理を適用する。

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

解答 z は絶対値が 1, 偏角が $\frac{\pi}{6}$ であるから $z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned}\text{よって } \frac{z^8+1}{z^4} &= z^4 + \frac{1}{z^4} \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^4 + \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{-4} \\ &= \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) + \left(\cos \frac{2}{3}\pi - i \sin \frac{2}{3}\pi \right) \\ &= 2 \cos \frac{2}{3}\pi = 2 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -1 \quad \text{答}\end{aligned}$$

教 p.103

6 n を 2 以上の整数とする。 $\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ のとき, 1 の n 乗根は, 1, α , α^2 , α^3 , $\dots$, α^{n-1} で与えられることを示せ。

指針 1 の n 乗根 1 の n 乗根は次の式から得られる n 個の複素数である。

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

ド・モアブルの定理により, $z_k = \alpha^k$ が成り立つことを示す。

解答 ド・モアブルの定理により, $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ に対して

$$\begin{aligned}\alpha^k &= \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k \\ &= \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\end{aligned}$$

ゆえに, $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ のとき, 1 の n 乗根 z_k について, $z_k = \alpha^k$ が成り立つ。

よって, 1 の n 乗根は, 1, α , α^2 , α^3 , $\dots$, α^{n-1} である。 終

7 方程式 $z^4=8(-1+\sqrt{3}i)$ を解け。

指針 複素数 α の n 乗根 $z^n=\alpha$ において, 複素数 z , α の極形式を

$$z=r(\cos \theta+i \sin \theta), \quad \alpha=r_0(\cos \theta_0+i \sin \theta_0)$$

とおくと $r^n(\cos n\theta+i \sin n\theta)=r_0(\cos \theta_0+i \sin \theta_0)$

両辺の絶対値と偏角を比較して, r , θ を求める。

このとき, $r>0$, $n\theta=\theta_0+2k\pi$ (k は整数) に注意する。

解答 z の極形式を $z=r(\cos \theta+i \sin \theta)$ …… ① とすると

$$z^4=r^4(\cos 4\theta+i \sin 4\theta)$$

また, $8(-1+\sqrt{3}i)$ を極形式で表すと

$$\begin{aligned} 8(-1+\sqrt{3}i) &= 16\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= 16\left(\cos \frac{2}{3}\pi+i \sin \frac{2}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

よって, 方程式は

$$r^4(\cos 4\theta+i \sin 4\theta)=16\left(\cos \frac{2}{3}\pi+i \sin \frac{2}{3}\pi\right)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^4=16, \quad 4\theta=\frac{2}{3}\pi+2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$r>0$ であるから $r=2$ …… ②

$$\text{また} \quad \theta=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$$

$0\leq\theta<2\pi$ の範囲では, $k=0, 1, 2, 3$ であるから

$$\theta=\frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{5}{3}\pi \quad \cdots \cdots \text{③}$$

②, ③を①に代入して, 求める解は

$$z=\sqrt{3}+i, \quad -1+\sqrt{3}i, \quad -\sqrt{3}-i, \quad 1-\sqrt{3}i \quad \square$$

- 8 $w=\bar{z}$ とする。複素数平面上で、点 z が円 $|z-i|=1$ 上を動くとき、点 w はどのような図形を描くか。

指針 条件を満たす点が描く図形 点 z は方程式 $|z-i|=1$ を満たすから、 $w=\bar{z}$ より z を w で表し、方程式に代入して、 w についての方程式を導く。このとき、共役複素数の性質を利用する。

解答 $w=\bar{z}$ より $\bar{w}=\overline{\bar{z}}=z$ ゆえに $z=\bar{w}$
これを $|z-i|=1$ に代入すると $|\bar{w}-i|=1$
 $\overline{w-i}=\bar{w}+i$ であるから

$$|\bar{w}+i|=1 \quad \text{すなわち} \quad |w+i|=1$$

よって、点 w は点 $-i$ を中心とする半径 1 の円を描く。 図

- 9 複素数平面上の 3 点 $A(2+i)$, $B(6-i)$, $C(4+yi)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について、 $\angle A = \frac{\pi}{2}$ であるように、実数 y の値を定めよ。

指針 直角三角形の頂点と複素数 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ とするとき、

$\angle A = \frac{\pi}{2}$ となる条件は $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数になることである。

解答 $\alpha=2+i$, $\beta=6-i$, $\gamma=4+yi$ とする。

$\angle A = \frac{\pi}{2}$ となるのは、 $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数のときである。

$$\begin{aligned} \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} &= \frac{(4+yi)-(2+i)}{(6-i)-(2+i)} \\ &= \frac{2+(y-1)i}{4-2i} \\ &= \frac{\{2+(y-1)i\}(2+i)}{2(2-i)(2+i)} \\ &= \frac{(5-y)+2yi}{10} \end{aligned}$$

であるから $5-y=0$ かつ $2y \neq 0$

よって、求める実数 y の値は $y=5$ 図

10 $\triangle ABC$ において、辺 BC の中点を M とする。

- (1) M を複素数平面上の原点とし、 $A(\alpha)$ 、 $B(\beta)$ 、 $C(\gamma)$ とする。 γ を β を用いて表せ。
- (2) 等式 $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$ が成り立つことを、(1) を利用して証明せよ。

指針 複素数平面と図形の性質

- (1) 点 M は線分 BC の中点であるから、点 $B(\beta)$ と点 $C(\gamma)$ は点 M に関して対称である。点 M を複素数平面上の原点にとると、 β と γ は原点に関して対称になる。
- (2) 第1章の章末問題8でベクトルを使って証明した中線定理(パップスの定理)である。

解答 (1) M を複素数平面上の原点とすると、点 β と点 γ は原点に関して対称であるから

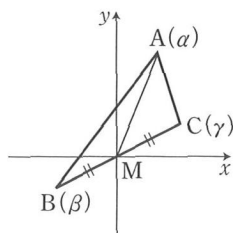
$$\gamma = -\beta \quad \text{図}$$

- (2) (1) より $\gamma = -\beta$ であるから

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= |\beta - \alpha|^2 + |\gamma - \alpha|^2 \\ &= |\beta - \alpha|^2 + |-\beta - \alpha|^2 \\ &= |\beta - \alpha|^2 + |\beta + \alpha|^2 \\ &= (\beta - \alpha)(\overline{\beta - \alpha}) + (\beta + \alpha)(\overline{\beta + \alpha}) \\ &= (\beta - \alpha)(\overline{\beta} - \overline{\alpha}) + (\beta + \alpha)(\overline{\beta} + \overline{\alpha}) \\ &= \beta\overline{\beta} - \beta\overline{\alpha} - \alpha\overline{\beta} + \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} + \beta\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \alpha\overline{\alpha} \\ &= 2(\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta}) = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また} \quad 2(AM^2 + BM^2) &= 2(|0 - \alpha|^2 + |0 - \beta|^2) \\ &= 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2) \quad \text{図}$$



第3章 章末問題 A

教 p.104

3
章複素数
平面

1. 次の式を計算せよ。

(1) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^6$

(2) $\left\{\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^8 + \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^8\right\}^2$

指針 $(a+bi)^n$ の値

(1) まず, $1+\sqrt{3}i$ と $1-i$ を極形式で表し, 極形式で表された複素数の商の公式を利用して, () 内を極形式で表す。

$$\frac{\cos \theta_1 + i \sin \theta_1}{\cos \theta_2 + i \sin \theta_2} = \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

そして, ド・モアブルの定理を利用して求める。

(2) $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ を極形式で表し, ド・モアブルの定理を利用する。

解答 (1) $1+\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

$$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

ゆえに $(1+\sqrt{3}i)^6 = 2^6(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 64$

$$(1-i)^6 = (\sqrt{2})^6\left\{\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)\right\} = 8i$$

よって $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^6 = \frac{(1+\sqrt{3}i)^6}{(1-i)^6} = \frac{64}{8i} = \frac{8}{i} = -8i$ 答

(2) $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$

$$\frac{\sqrt{3}-i}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

ゆえに $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^8 + \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^8$

$$= \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right) + \left(\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)\right)$$

$$= 2\cos \frac{4}{3}\pi = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

よって $\left\{\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^8 + \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^8\right\}^2 = (-1)^2 = 1$ 答

2. 複素数平面上的3点 $A(1+i)$, $B(-2-3i)$, $C(5-2i)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について、次のものを求めよ。

- (1) $\angle A$ の大きさ (2) 外接円の中心を表す複素数 δ

指針 三角形の角の大きさ, 外心

(1) $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ とすると, $\angle BAC$ の大きさは, $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の偏角を考慮することで求められる。

(2) (1)の結果より, 辺 BC の中点が外接円の中心となる。

解答 $\alpha=1+i$, $\beta=-2-3i$, $\gamma=5-2i$ とする。

$$(1) \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{(5-2i)-(1+i)}{(-2-3i)-(1+i)} = \frac{4-3i}{-3-4i} = -\frac{(4-3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = i$$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \text{ であるから } \angle A = \frac{\pi}{2} \quad \text{答}$$

(2) (1)から, $\triangle ABC$ は $\angle A$ が直角である直角三角形である。よって, 辺 BC は外接円の直径となり, 中心は辺 BC の中点となる。その点を表す複素数 δ は

$$\delta = \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{(-2-3i)+(5-2i)}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i \quad \text{答}$$

3. $\alpha=1+i$, $\beta=5+3i$ とする。複素数平面上で3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする正三角形 ABC を作るとき, 複素数 γ を求めよ。

指針 正三角形の頂点を表す複素数 $AB=AC$, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ であるから, 点 $C(\gamma)$

は, 点 $B(\beta)$ を点 $A(\alpha)$ を中心として $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。

$$\text{よって } \gamma - \alpha = \left\{ \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) \right\} (\beta - \alpha) \text{ (複号同順)}$$

解答 点 β を, 点 α を中心として $\frac{\pi}{3}$ または $-\frac{\pi}{3}$ だけ

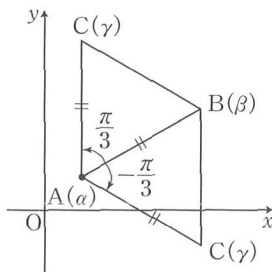
回転した点が点 γ である。

$$\gamma - \alpha = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (\beta - \alpha) \text{ のとき}$$

$$\gamma = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \{ (5+3i) - (1+i) \}$$

$$+ (1+i)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (4+2i) + (1+i)$$



$$=(3-\sqrt{3})+(2+2\sqrt{3})i$$

$$\gamma-\alpha=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(\beta-\alpha) \text{ のとき}$$

$$\gamma=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\{(5+3i)-(1+i)\}+(1+i)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4+2i)+(1+i)$$

$$=(3+\sqrt{3})+(2-2\sqrt{3})i$$

よって

$$\gamma=(3+\sqrt{3})+(2+2\sqrt{3})i \quad \text{または} \quad \gamma=(3+\sqrt{3})+(2-2\sqrt{3})i \quad \text{答}$$

教 p.104

4. 0 でない 2 つの複素数 α , β が等式 $4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$ を満たす。

(1) $\frac{\beta}{\alpha}$ を極形式で表せ。ただし、偏角 θ の範囲は $-\pi < \theta \leq \pi$ とする。

(2) 複素数平面上の 3 点 0 , α , β を頂点とする三角形の 3 つの角の大きさを求めよ。

指針 等式を満たす複素数, 三角形の角の大きさ

(1) α は 0 でない複素数であるから, 等式 $4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$ の両辺を α^2 で

割り, $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+4=0$ と変形して, まず, $\frac{\beta}{\alpha}$ を求める。

(2) $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$ とすると, (1) から $\angle AOB$ の大きさがわかる。

また, $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=2$ から $|\beta|=2|\alpha|$ すなわち $OB=2OA$ となり,

$\triangle OAB$ の形がわかる。このことから 3 つの角を求める。

解答 (1) 等式の両辺を $\alpha^2 (\neq 0)$ で割ると

$$4-\frac{2\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}=0 \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+4=0$$

$$\text{よって} \quad \frac{\beta}{\alpha}=1\pm\sqrt{1-4}=1\pm\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

偏角 θ について $-\pi < \theta \leq \pi$ であるから

$$\frac{\beta}{\alpha}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right), \quad 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad \text{答}$$

$$(2) (1) \text{より} \quad \frac{\beta-0}{\alpha-0}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\frac{\beta-0}{\alpha-0}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

であるから, $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$ とすると

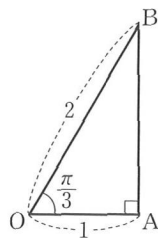
$$\angle AOB = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{また} \quad \left| \frac{\beta - 0}{\alpha - 0} \right| = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| = 2$$

$$\text{ゆえに} \quad OB = 2OA$$

よって、 $\triangle OAB$ は、 $\angle A = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形であるから、求める3つの角の大きさは

$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \quad \boxed{\text{答}}$$



第3章 章末問題 B

教 p.104

3章

複素数平面

5. 複素数平面上の3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ を頂点とする $\triangle ABC$ について、等式 $2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma = 0$ が成り立つとき、次の問いに答えよ。

- (1) 複素数 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の値を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ はどのような三角形か。

指針 複素数の等式と三角形の形状決定

- (1) まず、与えられた等式の左辺を $\gamma - \alpha$, $\beta - \alpha$ が出てくるように変形する。
- (2) (1)から $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ の絶対値がわかる。

解答 (1) 等式を変形すると $(\gamma - \alpha)^2 + (\beta - \alpha)^2 = 0$ $\alpha \neq \beta$ より、 $\beta - \alpha \neq 0$ であるから、両辺を $(\beta - \alpha)^2$ で割って整理すると

$$\left(\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right)^2 = -1$$

よって $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \pm i$ 〇

- (2) (1)から $\left|\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}\right| = |\pm i| = 1$ すなわち $|\gamma - \alpha| = |\beta - \alpha|$

ゆえに $AC = AB$ また、 $\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$ は純虚数であるから $\angle A = \frac{\pi}{2}$ よって、 $\triangle ABC$ は $\angle A = \frac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形である。 〇

教 p.104

6. $\alpha = 1 + \sqrt{3}i$ とする。複素数平面上の原点 O と点 $A(\alpha)$ を結ぶ線分 OA の垂直二等分線上の点を表す複素数 z について、次の問いに答えよ。

- (1) $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}$ の値は一定であることを示せ。
- (2) $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}$ の値を求めよ。

指針 $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}$ の値

- (1) $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}$ を z を含まない式で表す。
- (2) (1)の結果を利用する。

解答 (1) z は $|z| = |z - \alpha|$ を満たすから $|z|^2 = |z - \alpha|^2$

$$\text{ゆえに } z\bar{z} = (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha})$$

$$\text{式を整理すると } \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2$$

よって、 $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}$ の値は一定である。 [終]

$$(2) \alpha = 1 + \sqrt{3}i \text{ について } |\alpha|^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$$

$$\text{よって } \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = 4 \quad \text{[答]}$$

教 p.104

7. 2つの複素数 w, z が、等式 $w = \frac{z-4}{z+2}$ を満たす。複素数平面上で、点 w が原点を中心とする半径2の円上を動くとき、点 z はどのような図形を描くか。

指針 条件を満たす点が描く図形 点 w は原点を中心とする半径2の円上を動くか

ら $|w| = 2$ である。この方程式に $w = \frac{z-4}{z+2}$ を代入する。

解答 点 w は原点を中心とする半径2の円上を動くから $|w| = 2$

$$\text{ゆえに } \left| \frac{z-4}{z+2} \right| = 2 \quad \text{すなわち } |z-4| = 2|z+2|$$

$$\text{両辺を2乗すると } |z-4|^2 = 4|z+2|^2$$

$$(z-4)(\overline{z-4}) = 4(z+2)(\overline{z+2})$$

$$(z-4)(\bar{z}-4) = 4(z+2)(\bar{z}+2)$$

$$\text{展開して整理すると } z\bar{z} + 4z + 4\bar{z} = 0$$

$$\text{式を変形すると } (z+4)(\bar{z}+4) = 16$$

$$\text{すなわち } |z+4|^2 = 4^2 \quad \text{よって } |z+4| = 4$$

したがって、点 z は、点 -4 を中心とする半径4の円を描く。 [答]